ENS RENNES

Concours Droit-économie

Ce sujet zéro a été élaboré dans le cadre de la réforme du concours d'entrée au département Droit-économie-management qui **entrera en vigueur à la session 2020**. Anciennement appelé *Concours D1*, il devient le *Concours Droit-économie* et il est régi par les arrêtés suivants, publiés le 17 mai 2018 :

- Conditions d'admission des élèves au concours Droit-Économie
arrêté du 18-4-2018 (NOR > ESRS1800072A)

- Programme du concours Droit-Économie d'admission en première année
arrêté du 18-4-2018 (NOR > ESRS1800073A)

Mathématiques appliquées et statistiques

Consignes :

— L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

— Deux feuilles de papier millimétré sont fournies avec l'énoncé.

— Tous les exercices peuvent être traités indépendamment.

— Une table de la loi normale se trouve en fin de sujet.

— La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

— Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (Quelques statistiques sur les habitations.)

On s'intéresse dans cet exercice à deux statistiques. L'une sur le nombre de logements construits et l'autre sur l'évolution du chiffre d'affaires du secteur de la construction de bâtiments, en France.

1) Le tableau ci-dessous *(source : INSEE)* donne la surface moyenne et le nombre moyen de pièces des résidences principales selon l'année d'achèvement, en France pour l'année 2013.

année d'achèvement	Nombre de ménages x_i (en millions)	Surface moyenne du logement (en m^2)	Nombre moyen de pièces
Avant 1949	7,43	94,4	4,1
De 1949 à 1974	8,36	81,8	3,8
De 1975 à 1981	3,27	91,5	4,1
De 1982 à 1989	2,43	97,3	4,3
De 1990 à 1998	2,52	91,4	3,9
De 1999 à 2012	4,05	98,3	4,1

(a) Quel est le type de cette série statistique (x_i) ?

(b) Tracer son histogramme, en considérant que la première classe commence à l'année 1900. On prendra 2 mm en abscisse pour une année.

(c) Quelles sont la ou les classes modales de cette série ?

(d) Calculer à partir du tableau la surface moyenne des logements.

(e) Déterminer le meilleur encadrement possible de l'année moyenne de construction.

(f) Peut-on calculer la surface moyenne d'une pièce, sur l'ensemble des logements ? (si oui, la déterminer ; si non, dire quels renseignements manquent.)

2) On s'intéresse maintenant à l'évolution du chiffre d'affaire du secteur de la construction de bâtiments.

Le tableau suivant *(Source : INSEE)* donne l'indice de chiffre d'affaires pour la construction de bâtiments. L'indice 100 étant fixé pour l'année 2010.

Année	Rang de l'année x_i	Chiffre d'affaires y_i	Année	Rang de l'année x_i	Chiffre d'affaires y_i
2017	19	101,7	2007	9	104,7
2016	18	106	2006	8	95,2
2015	17	103,7	2005	7	84,8
2014	16	103	2004	6	79
2013	15	106,8	2003	5	72,2
2012	14	108,3	2002	4	69
2011	13	107,5	2001	3	63,9
2010	12	100	2000	2	58,3
2009	11	100,1	1999	1	53,3
2008	10	111,7			

(a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,19}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 1 cm pour 1 année et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour 5 points d'indice.

(b) Calculer la moyenne et la variance du chiffre d'affaires.

(c) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié ?

(d) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique.

(e) En déduire enfin une prévision pour l'année 2020.

(f) On effectue le changement de variable :

$$\forall i \in \{0; \ldots ; 14\}, u_i = \ln(x_i)$$

Présenter dans un tableau la nouvelle série $(u_i; y_i)$.

(g) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (u_i, y_i). Un ajustement affine est-il justifié ?

(h) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en u par la méthode des moindres carrés.

(i) En déduire une expression de y en fonction de x.
En utilisant cet ajustement, déterminer en quelle année on peut espérer que le chiffre d'affaires atteigne à nouveau son niveau de 2008 ?
Quelle crédibilité accordez-vous à cette estimation ?

Exercice 2 (Étude de fonctions et variables à densités)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a un réel strictement positif.
On considère la fonction φ_n définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi_n(x) = x^n e^{-ax}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de φ_n.

Partie 1 – Étude de fonctions.

1) Donner la limite de φ_n en $+\infty$.

2) Justifier que φ_n est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

3) En déduire le tableau de variation complet de φ_n.

4) φ_n admet-elle un maximum global sur $[0; +\infty[$?

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersections entre les courbes de φ_n et φ_{n+1}.
Quelle est la pente de la tangente à la courbe de φ_n en ces points.

6) Tracer, dans un même repère orthonormé dont l'unité graphique est de 3 cm, les allures de $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en prenant $a = 1$.
On placera les tangentes horizontales, ainsi que les tangentes aux points d'intersection.

Partie 2 – Intégration.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$G_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)dt = \int_0^x t^n e^{-at}dt$$

On pose aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)dt$$

1) Justifier l'existence de $G_n(x)$ puis calculer $G_0(x)$. En déduire la valeur de I_0.

2) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $G_{n+1}(x)$ et $G_n(x)$.
En déduire que $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{a} I_n$.

3) Montrer finalement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$.

Partie 3 – Variables à densité

On considère maintenant, pour $n \geq 1$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} a^n \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) En utilisant les deux parties précédentes, justifier que f_n est une densité de probabilité.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Soit X_n une variable aléatoire dont la densité est f_n.

2) Reconnaître la loi de X_1, donner son espérance.

3) Calculer l'espérance de X_n.

Partie 4 – Le paradoxe de l'autobus

On attend à un arrêt d'autobus.
La variable aléatoire à densité X_n, définie dans la partie précédente, donne le temps de passage du n-ème autobus.
Pour tout réel $t > 0$, on pose N_t la variable aléatoire qui donne le nombre d'autobus passés entre l'instant 0 et l'instant t.

1) Justifier l'égalité d'événements suivante en donnant sa signification en français :

$$\forall n \geq 1, \quad (N_t = n) = (X_n \leq t < X_{n+1})$$

2) En déduire que, pour $n \geq 1$, $P(N_t = n) = P(X_n \leq t) - P(X_{n+1} \leq t)$.
Et en déduire enfin que N_t suit une loi de Poisson de paramètre at.
Donner l'espérance et la variance de N_t.

3) On suppose maintenant précisément que le temps entre deux passages d'autobus est en moyenne de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt d'autobus à l'instant $t = 100$ pour prendre l'autobus.

Deux questions se posent :
— Combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ?
— Combien de temps en moyenne s'écoule-t-il entre le prochain bus et le bus qui a précédé ?
On peut démontrer (admis ici) que les réponses à ces questions sont respectivement 10 et 20 minutes.

En quoi ces valeurs sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?

Exercice 3 (Probabilités)

On s'intéresse au dépistage d'une maladie puis de son traitement.

Partie 1 – Efficacité du test de dépistage.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On considère une maladie qui touche 2% de la population.
On a un test efficace à 98%, c'est-à-dire que :
— Le test est positif dans 98% des cas si la personne est contaminée.
— Le test est négatif dans 98% des cas si la personne n'est pas contaminée.

On prend une personne au hasard dans la population et on lui fait un test. On considère les événements suivants :
— C : « La personne est contaminée. »
— T : « Le test est positif. »
— E : « Le test donne une réponse erronée. »

1) Donner la probabilité $P(C)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P_C(T)$ et $P_{\overline{C}}(T)$.

2) Calculer la probabilité que le test soit positif et que la personne soit contaminée.

3) Calculer la probabilité que le test soit positif.

4) Le test est positif, calculer la probabilité que la personne soit contaminée.

5) Déterminer la probabilité que la réponse du test soit erronée.

Partie 2 – Traitement.

On veut maintenant étudier un processus de vaccination afin de limiter l'impact de la maladie.
On prend un échantillon de n personnes et on les vaccinent toutes. Chaque vaccin coûte 5€. Après avoir été vaccinée, chaque personne n'a que deux chances sur trois d'être imunisée.
Ensuite chaque personne non encore immunisée reçoit une dose d'un autre vaccin, dont la dose coûte 20€, qui imunise la personne une fois sur deux.
On souhaite estimer le coût de la vaccination de ces n personnes.

On pose les variables aléatoires réelles suivantes :

— N : nombre de personnes non immunisées à la suite de l'injection du premier vaccin.
— M : nombre de personnes non immunisées à la fin du processus.
— C : coût total des vaccins.

1) Déterminer la loi de N.
Donner l'espérance et la variance de N.

2) (a) Donner $M(\Omega)$.

(b) Soit $k \in [\![0;n]\!]$, on suppose ici que $(N = k)$ est réalisé, c'est à dire que l'on sait que k personnes ne sont pas immunisées par la première injection.
Déterminer la loi de M, sachant que $(N = k)$ est réalisé. (cela se note $M_{(N=k)} \hookrightarrow \ldots$).

Dans la suite du problème on admettra que :

$$\forall (k,l) \in [\![0;n]\!]^2, \quad P_{(N=k)}(M = l) = \begin{cases} \binom{k}{l}\frac{1}{2^k} & \text{si } l \leqslant k \\ 0 & \text{si } l > k \end{cases}$$

(c) En déduire, pour tout $(k,l) \in [\![0;n]\!]^2$, la valeur de $P[(N = k) \cap (M = l)]$.

3) (a) Montrer que

$$\forall l \in [\![0;n]\!], P(M = l) = \sum_{k=l}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

(b) Montrer que, pour $0 \leqslant l \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

(c) En déduire que

$$\forall l \in [\![0;n]\!], P(M = l) = \binom{n}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^l \sum_{k'=0}^{n-l} \binom{n-l}{k'}\left(\frac{1}{6}\right)^{k'}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k'-l}$$

(d) En déduire que M suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$.

4) (a) Exprimer le coût C des vaccin en fonction de N et de n.

(b) Calculer l'espérance et la variance de C.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Mathématiques appliquées et statistiques

Correction

Exercice 1 (Quelques statistiques sur les habitations.)

1) (a) Il s'agit d'une série statistique univariée quantitative continue.

(b)

(c) La classe modale est celle présentant la plus grande densité : c'est la classe 1975-1981.

(d) $\dfrac{7{,}43 \times 94{,}4 + 8{,}36 \times 81{,}8 + 3{,}27 \times 91{,}5 + 2{,}43 \times 97{,}3 + 2{,}52 \times 91{,}4 + 4{,}05 \times 98{,}3}{7{,}43 + 8{,}36 + 3{,}27 + 2{,}43 + 2{,}52 + 4{,}05} \simeq 90{,}9$. Soit une moyenne de $90{,}9\text{m}^2$.

(e) La moyenne la plus basse possible sera obtenue en supposant que toutes les résidences ont été contruites pendant la première année de la classe et la plus grande la dernière année.

$$\frac{7{,}43 \times 1900 + 8{,}36 \times 1949 + 3{,}27 \times 1975 + 2{,}43 \times 1982 + 2{,}52 \times 1990 + 4{,}05 \times 1999}{7{,}43 + 8{,}36 + 3{,}27 + 2{,}43 + 2{,}52 + 4{,}05} \simeq 1952{,}8$$

$$\frac{7{,}43 \times 1948 + 8{,}36 \times 1974 + 3{,}27 \times 1981 + 2{,}43 \times 1989 + 2{,}52 \times 1998 + 4{,}05 \times 2012}{7{,}43 + 8{,}36 + 3{,}27 + 2{,}43 + 2{,}52 + 4{,}05} \simeq 1976{,}9$$

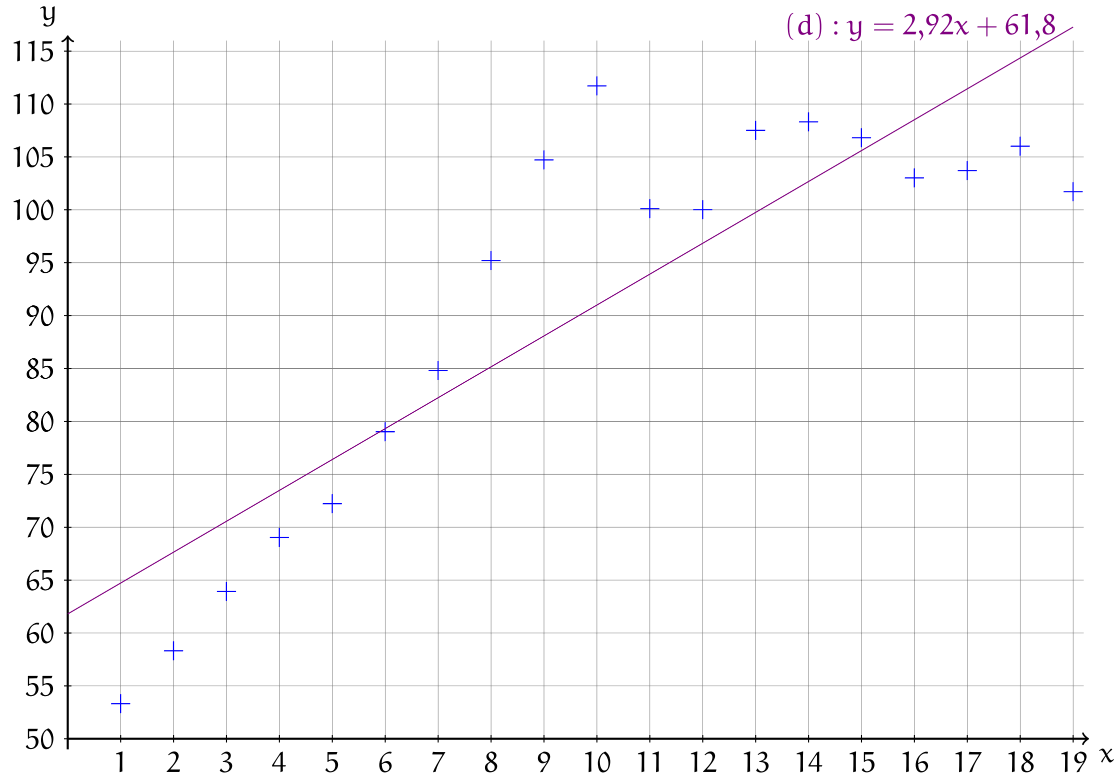
Donc l'année moyenne de construction est entre 1952 et 1977.

(f) Il suffit de faire la surface total (en millions de m^2) divisé par le nombre total de pièces (en millions) :

$$\frac{7{,}43 \times 94{,}4 + 8{,}36 \times 81{,}8 + 3{,}27 \times 91{,}5 + 2{,}43 \times 97{,}3 + 2{,}52 \times 91{,}4 + 4{,}05 \times 98{,}3}{7{,}43 \times 4{,}1 + 8{,}36 \times 3{,}8 + 3{,}27 \times 4{,}1 + 2{,}43 \times 4{,}3 + 2{,}52 \times 3{,}9 + 4{,}05 \times 4{,}1} \simeq 22{,}7$$

Soit $22{,}7\text{m}^2$ en moyenne par pièce.

2) (a)



(b) $\overline{y} = \dfrac{1}{19}\displaystyle\sum_{i=1}^{19} y_i \simeq 91{,}0 \qquad \sigma_y^2 = \dfrac{1}{19}\displaystyle\sum_{i=1}^{19} y_i^2 - \overline{y}^2 \simeq 8625{,}5$

(c) $\sigma_{xy} = \dfrac{1}{19}\displaystyle\sum_{i=1}^{19} x_i y_i - \overline{xy} \simeq 88 \qquad r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \simeq 0{,}86$

Comme $r^2 > 0{,}7$, l'ajustement est assez bon mais le graphique semble montrer deux parties linéaires plutôt qu'une. L'ajustement affine ne semble donc pas indiqué ici.

(d) $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \simeq 2{,}92$ et $b = \overline{y} - a\overline{x} \simeq 61{,}8$

Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x est donc $y = 2{,}92x + 61{,}8$.

(e) Prévision pour l'année 2020 : $y = 2{,}92 \times 22 + 61{,}8 = 126{,}0$

(f)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
u_i	0	0,69	1,1	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,2	2,3	2,4	2,48	2,56	2,64
y_i	53,3	58,3	63,9	69	72,2	79	84,8	95,2	104,7	111,7	100,1	100	107,5	108,3

(g) Le coefficient de corrélation linéaire de la série (u_i, y_i) est $r' \simeq 0{,}94$. $r'^2 \simeq 0{,}88$ donc la corrélation est assez forte et le nuage de point est globalement linéaire. La régression linéaire semble être indiquée.

(h) De la même manière qu'à la question **(d)**, une équation de la droite d'ajustement affine de y en u est :

$$y = 24{,}4u + 42{,}2$$

(i) On en déduit que $y = 24{,}4\ln(x) + 42{,}2$.

$$y \geq 11{,}7 \iff 24{,}4\ln(x) + 42{,}2 \geq 111{,}7 \iff 24{,}4\ln(x) \geq 69{,}5 \iff \ln(x) \geq 2{,}85 \iff x \geq e^{2{,}85}$$

Comme $e^{2,85} \simeq 17{,}3$, on peut estimer que qu'on retrouvera le niveau de 2008 à partir de l'année 2016.
D'un point de vue mathématique, l'estimation est plutôt crédible car la corrélation est assez forte et l'estimation est proche de la période utilisée pour produire l'ajustement. Cependant, on ne peut s'empêcher de remarquer que, dans le tableau, en 2016 le niveau de 2008 n'a pas été atteint.

Exercice 2 (Étude de fonctions et variables à densités)

Partie 1 – Étude de fonctions.

1) D'après le théorème des croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_n(x) = 0$.

2) $x \longmapsto -ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \longmapsto e^{-ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Or $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc φ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, si $n \geq 1$,

$$\varphi_n'(x) = nx^{n-1}e^{-ax} - ax^n e^{-ax} = (n - ax)x^{n-1}e^{-ax}$$

$$\varphi_0'(x) = -ae^{-ax}$$

3) $\varphi_n'(x) \geq 0 \iff n - ax \geq 0 \iff n \geq ax \iff x \leq \dfrac{n}{a}$ car $a > 0$.
Si $n \geq 1$, $\varphi_n'(x) = 0 \iff \left(n - ax = 0 \text{ ou } x^{n-1} = 0\right) \iff \left(x = \dfrac{n}{a} \text{ ou } x = 0 \text{ et } n \geq 2\right)$.

x	0		$+\infty$
$\varphi_0'(x) = -ae^{-ax}$		$-$	
$\varphi_0(x)$	1	$\searrow$	0

x	0		$\dfrac{1}{a}$		$+\infty$
$\varphi_1'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$\varphi_1(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e^{-1}}{a}$	$\searrow$	0

Si $n \geqslant 2$,

x	0		$\dfrac{n}{a}$		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi_n(x)$	0	$\nearrow$	$\left(\dfrac{n}{a}\right)^n e^{-n}$	$\searrow$	0

4) Vu le tableau de variations précédent, φ_n admet-elle un maximum global sur $[0;+\infty[$ en $\frac{n}{a}$ qui vaut $\varphi_n\left(\frac{n}{a}\right) = \left(\frac{n}{a}\right)^n e^{-n}$.

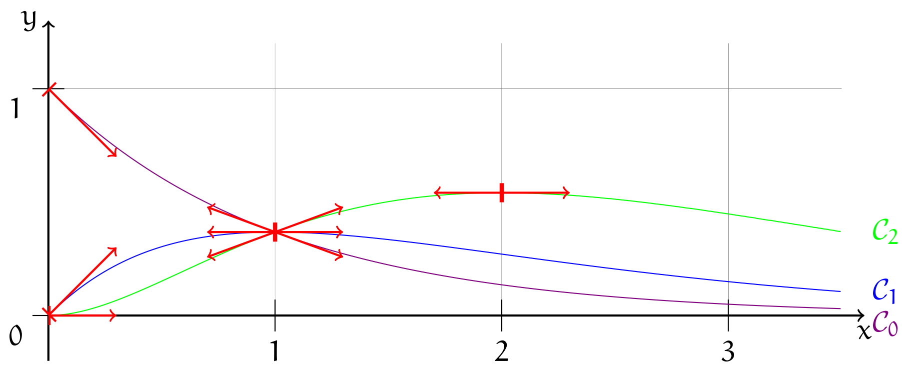
5) $\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) = 0 \iff x^n e^{-ax} - x^{n+1}e^{-ax} = 0 \iff x^n e^{-ax}(1-x) = 0 \iff (1-x = 0$ ou $x^n = 0) \iff (x = 1$ ou $(x = 0$ et $n > 0))$.

$\varphi_n(0) = 0^n e^{-a\times 0} = 0$, si $n > 0$, et $\varphi_n(1) = 1^n e^{-a\times 1} = e^{-a}$.

Donc toutes les courbes des φ_n se coupent au point de coordonnées $(1, e^{-a})$ et la pente de $\mathcal{C}_n$ en ce point est $\varphi_n'(1) = (n-a)1^{n-1}e^{-a\times 1} = (n-a)e^{-a}$.

Et toutes les courbes des φ_n sauf celle de φ_0 se coupent au point de coordonnées $(0,0)$ et la pente de $\mathcal{C}_n$ en ce point est $\varphi_n'(0) = (n-a)0^{n-1}e^{-a\times 0}$, c'est-à-dire 0 si $n \geq 2$ et $1-a$ si $n = 1$.

6)



Partie 2 – Intégration.

1) φ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $G_n(x)$ existe.

$$G_0(x) = \int_0^x t^0 e^{-at}dt = \int_0^x e^{-at}dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^x = \frac{e^{-ax}}{-a} - \frac{e^0}{-a} = \frac{1-e^{-ax}}{a}$$

Donc $I_0 = \lim_{x\to+\infty} G_0(x) = \frac{1-0}{a} = \frac{1}{a}$ car $a > 0$.

2) On intègre par parties :

$t \longmapsto t^{n+1}$ et $x \longmapsto \frac{e^{-at}}{-a}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \int_0^x t^{n+1}e^{-at}dt \\
&= \left[t^{n+1}\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^x - \int_0^x (n+1)t^n \frac{e^{-at}}{-a}dt \\
&= x^{n+1}\frac{e^{-ax}}{-a} - 0^{n+1}\frac{e^0}{-a} + \frac{n+1}{a}\int_0^x t^n e^{-at}dt \\
&= -x^{n+1}\frac{e^{-ax}}{a} + \frac{n+1}{a}G_n(x) \quad \text{car } n+1 > 0.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} G_n(x) = I_n$ et, d'après le théorème des croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} x^{n+1}e^{-ax} = 0$ car $a > 0$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} G_{n+1}(x) = 0 + \frac{n+1}{a}\lim_{x\to+\infty} G_n(x)$ donc $I_{n+1} = \frac{n+1}{a}I_n$.

3) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{P}_n : \left(I_n = \frac{n!}{a^{n+1}} \right)$$

- D'après la question **1)** $I_0 = \frac{1}{a} = \frac{0!}{a^1}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{n+1}{a} I_n \quad \text{d'après la question précédente.} \\ &= \frac{n+1}{a} \times \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n. \\ &= \frac{(n+1)n!}{aa^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{a^{n+2}} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Partie 3 – Variables à densité

1) D'après le tableau de variations de φ_{n-1} de la question **3)** de la partie 1, la fonction f_n est positive. Elle est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$ (car φ_{n-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc continue) et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \frac{a^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \varphi_{n-1} = \frac{a^n}{(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{a^n} = 1$$

d'après la question **3)** de la partie 2.

Finalement f_n est une densité de probabilité.

2) $f_1(x) = \begin{cases} a^1 \frac{x^0}{0!} e^{-ax} = ae^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc X_1 suit la loi exponentielle de paramètre a.

Donc $E(X) = \frac{1}{a}$.

3) $\forall x \geq 0$, $|xf_n(x)| = xf_n(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^n e^{-ax} = \frac{a^n}{(n-1)!} \varphi_n(x)$

Or $\int_0^{+\infty} x^n \varphi_n(t)dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} |tf_n(t)|dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf_n(t)|dt$ aussi. Donc l'espérance de X_n existe.

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} \varphi_n(t)dt = \frac{a^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)dt \\ &= \frac{a^n}{(n-1)!} I_n = \frac{a^n}{(n-1)!} \times \frac{n!}{a^{n+1}} = \frac{n}{a} \end{aligned}$$

Partie 4 – Le paradoxe de l'autobus

1) $(N_t = n)$ est l'événement « n bus exactement sont passés entre l'instant 0 et l'instant t ».
Et $(X_n \leq t < X_{n+1})$ est l'événement « à l'instant t, le n-ième bus est passé mais pas le $(n+1)$-ième ».
Il s'agit bien du même événement.

2) Si le n-ième bus arrive après l'instant t, alors le $(n+1)$-ième aussi. Donc $(X_{n+1} \leq t) \subset (X_n \leq t)$, donc

$$\begin{aligned}
P(N_t = n) &= (X_n \leq t < X_{n+1}) \\
&= P\big((X_n \leq t) \setminus (X_{n+1} \leq t)\big) \\
&= P(X_n \leq t) - P(X_{n+1} \leq t)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
P(X_n \leq t) &= \int_{-\infty}^{t} f_n(x)dx \\
&= \int_0^t \frac{a^n}{(n-1)!}\varphi_{n-1}(x)dx \\
&= \frac{a^n}{(n-1)!}\int_0^t \varphi_{n-1}(x)dx \\
&= \frac{a^n}{(n-1)!}G_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

Donc $P(N_t = n) = \dfrac{a^n}{(n-1)!}G_{n-1}(t) - \dfrac{a^{n+1}}{n!}G_n(t)$.
Or, d'après la question 2) de la partie 2,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ G_{n+1}(x) = -x^{n+1}\frac{e^{-ax}}{a} + \frac{n+1}{a}G_n(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(N_t = n) &= \frac{a^n}{(n-1)!}G_{n-1}(t) - \frac{a^{n+1}}{n!}\left(-t^n\frac{e^{-at}}{a} + \frac{n}{a}G_{n-1}(t)\right) \\
&= \frac{a^n}{(n-1)!}G_{n-1}(t) + \frac{a^n t^n e^{-at}}{n!} - \frac{a^n}{(n-1)!}G_{n-1}(t) \\
&= \frac{e^{-at}(at)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq 1$, $P(N_t = n) = \dfrac{e^{-at}(at)^n}{n!}$.
De plus $P(N_t = 0) = P(X_1 > t) = 1 - P(X_1 \leq t) = 1 - \displaystyle\int_0^t ae^{-ax}dx = 1 - \big[-e^{-ax}\big]_0^t = 1 - (1 - e^{-at}) = e^{-at} = \dfrac{e^{-at}(at)^0}{0!}$.
Finalement N_t suit une loi de Poisson de paramètre at, donc $E(N_t) = at$ et $V(N_t) = at$.

3) Le 10 semble dire que, peut importe combien de temps est déjà passé depuis le passage du bus précédent, le temps d'attente moyen lorsqu'on arrive à l'arrêt sera de toute façon de 10 minutes.
Le 20 semble dire qu'en plus de cela, l'effet semble être le même dans le passé, le bus précédent est passé en moyenne 20 minute avant l'arrivée du suivant soit en moyenne 10 avant notre arrivé à l'arrêt de bus.

Exercice 3 (Probabilités)

Partie 1 – Efficacité du test de dépistage.

1) D'après l'énoncé $P(C) = 0{,}02$, $P_C(T) = 0{,}98$ et $P_{\overline{C}}(\overline{T}) = 0{,}02$. Donc $P_{\overline{C}}(\overline{T}) = 1 - P_{\overline{C}}(\overline{T}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$.

2) $P(T \cap C) = P(C)P_C(T) = \frac{2}{100} \times \frac{98}{100} = \frac{196}{10000}$ d'après la formule des probabilités composées.

3) Comme $(C,\overline{C})$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(T) = P(C)P_C(T) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(T) = \frac{2}{100} \times \frac{98}{100} + \frac{98}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{392}{10000}$$

4) $P_T(C) = \frac{P(T \cap C)}{P(T)} = \frac{392}{10000} \times \frac{196}{10000} = \frac{1}{2}$.

5)

$$\begin{aligned}
P(C \cap \overline{T} \cup \overline{C} \cap T) &= P(C \cap \overline{T}) + P(\overline{C} \cap T) \quad \text{car } C \cap \overline{T} \text{ et } \overline{C} \cap T \text{ sont incompatibles.} \\
&= P(C)P_C(\overline{T}) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(T) \quad \text{d'après la formule des probabilités composées.} \\
&= P(C)(1 - P_C(T)) + (1 - P(C))P_{\overline{C}}(T) \\
&= \frac{2}{100}(1 - \frac{98}{100}) + (1 - \frac{2}{100})\frac{2}{100} \\
&= \frac{2}{100}(1 - \frac{98}{100} + 1 - \frac{2}{100}) = \frac{2}{100}
\end{aligned}$$

Partie 2 – Traitement.

1) On répète n fois l'expérience : « vacciner une personne »
- les épreuves sont indépendantes.
- la probabilité de succès, c'est-à-dire que la personne ne soit pas immunisée, est de $\frac{1}{3}$.
- N désigne le nombre de succès.

Donc $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\frac{1}{3})$.

$E(N) = n \times \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$ et $V(N) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$.

2) (a) $M(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

(b) Soit $k \in [\![0; n]\!]$, si $(N = k)$ est réalisé, on répète k fois l'expérience : « vacciner une seconde fois une personne »
- les épreuves sont indépendantes.
- la probabilité de succès, c'est-à-dire que la personne ne soit pas immunisée, est de $\frac{1}{2}$.
- M désigne le nombre de succès.

Donc $M_{(N=k)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$.

(c) Soit $(k,l) \in [\![0;n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
P[(N=k)\cap(M=l)] &= P(N=k)P_{(N=k)}(M=l)\\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\begin{cases}\binom{k}{l}\dfrac{1}{2^k} & \text{si } l \leqslant k\\ 0 & \text{si } l > k\end{cases}\\
&= \begin{cases}\binom{n}{k}\binom{k}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} & \text{si } l \leqslant k\\ 0 & \text{si } l > k\end{cases}
\end{aligned}$$

3) (a) Soit $l \in [\![0;n]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(M=l) &= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{P[(N=k)\cap(M=l)]}_{=0 \text{ si } k<l} = \sum_{k=l}^{n} P[(N=k)\cap(M=l)]\\
&= \sum_{k=l}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

(b) Soit $0 \leq l \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \frac{n!}{l!(n-l)!}\times\frac{(n-l)!}{(k-l)!(\underbrace{n-l-(k-l)}_{n-k})!} = \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!}$$

donc $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

(c) D'après les deux questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
P(M=l) &= \sum_{k=l}^{n}\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\\
&= \binom{n}{l}\sum_{k=l}^{n}\binom{n-l}{k-l}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\\
&= \binom{n}{l}\sum_{k'=0}^{n}\binom{n-l}{k'}\left(\frac{1}{6}\right)^{k'+l}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k'-l} \quad \text{en posant } k'=k-l.\\
&= \binom{n}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^l\sum_{k'=0}^{n}\binom{n-l}{k'}\left(\frac{1}{6}\right)^{k'}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k'-l}
\end{aligned}$$

(d) D'après la formule du binôme et la question précédente, on a

$$\forall l \in [\![0;n]\!],\ P(M=l) = \binom{n}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^l\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)^{n-l} = \binom{n}{l}\left(\frac{1}{6}\right)^l\left(\frac{5}{6}\right)^{n-l}$$

De plus $M(\Omega) = [\![0;n]\!]$ donc M suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$.

4) (a) n personnes reçoivent n vaccins à 5€ puis N personnes reçoivent les vaccins à 20€. Donc $C = 5n + 20N$.

(b) $E(C) = E(5n+20N) = 5n + 20E(N) = 5n + 20\times\dfrac{n}{3} = \dfrac{35n}{3}$

(c) $V(C) = V(5n+20N) = 20^2V(N) = 400\times\dfrac{2n}{9} = \dfrac{800n}{9}$